数理解析研究所講究録
191巻 1973年 30-33

Ky-Fanの不等式について

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \leqq \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} (1-x_i)\right)^n$$

千葉大 教養部 大関信雄

$0 < x_i \leqq \frac{1}{2}$ $(i=1,2\ldots n)$ のとき

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \leqq \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} (1-x_i)\right)^n, \quad [1]$$

は Levinson, popoviciu 等によって $f(x)$ に適当な条件をつけて次の様に拡張された。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) \leqq \frac{1}{n}\sum f(y_i) - f\left(\frac{1}{n}\sum y_i\right) \quad (x_i + y_i = 2a,\ 0 < x_i < a)$$

ここでは、これとは別に対称関数についての不等式を考えよう。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X_1, \quad \sum_{i\neq j}^{n} x_i x_j = X_2, \quad \cdots \quad x_1 x_2 \cdots x_n = X_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = Y_1 \quad \sum_{i\neq j}^{n} y_i y_j = Y_2, \quad \cdots \quad y_1 y_2 \cdots y_n = Y_n$$

$(X_0 = Y_0 = 1)$

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = S_r$$

$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = r$

$\alpha_i = 0$ or positive integers.

$$\sum y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} = T_r$$

$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = r$

$\alpha_i = 0$ or positive integers.

定理。 $0 < x_i \leqq K \leqq y_i \quad (i=1, 2 \ldots n)$ のとき

(1) $$\frac{X_r}{X_{r-1}} \leqq \frac{K(n-r+1)}{r} \leqq \frac{Y_r}{Y_{r-1}}$$

$$\frac{S_r}{S_{r-1}} \leqq \frac{K(n+r+1)}{r} \leqq \frac{T_r}{T_{r-1}}$$

(2)

(2) $0 < x_i \le \frac{1}{2}$ $x_i + y_i = 1$ $(i = 1, 2 \cdots n)$.

(I) $$\frac{X_r}{X_{r-1}} + \frac{Y_r}{Y_{r-1}} \le \frac{n-r+1}{r}$$

$$\frac{n+r-1}{r} \le \frac{S_r}{S_{r-1}} + \frac{T_r}{T_{r-1}}$$ [2]

(II) $$\left(\frac{S_2}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left(\frac{S_1}{T_1}\right) = \left(\frac{X_1}{Y_1}\right) \ge \left(\frac{X_2}{Y_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

尚 $x_i + y_i = 1$ $0 < x_i \le y_i$ $(i = 1, 2 \cdots n)$

$\frac{X_1}{Y_1} \cdot \frac{X_3}{Y_3} \le \left(\frac{X_2}{Y_2}\right)^2$ あるいは

$\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^{\frac{1}{3}} \le \left(\frac{X_2}{Y_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ がなりたつか、又は

なりたたないかは残念ながらぼくにはわからなかった。御教示をまつ次第。

References

[1] F. Beckenbach, R. Bellman
Inequalities. P. 5

D. S. Mitrinović: Analytic Ineq.
P. 363

[2] D. S. Mitrinović: Analytic Ineq.
P 102—105

[1] P. 33 — P. 35

$$E_1(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$E_2(x) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$$

$$\vdots$$

$$E_n(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$\frac{E_r(x+y)}{E_{r-1}(x+y)} \geq \frac{E_r(x)}{E_{r-1}(x)} + \frac{E_r(y)}{E_{r-1}(y)}.$$